Redilat
Red de Investigadores Latinoamericanos
LATAM REVISTA LATINOAMERICANA DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

DOI: https://doi.org/10.56712/latam.v5i6.3040

Métodos Iterativos para la Resolución de Ecuaciones No Lineales (2021-2024): Eficiencia y Orden de Convergencia. Revisión Sistemática

Systematic Review of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations (2021-2024): Efficiency and Order of Convergence

Julio Cesar Villavicencio Mera
jvillavicenciom@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0009-0006-0822-1686
Universidad Estatal de Milagro
Milagro – Ecuador

Rayner Reynaldo Ricaurte Párraga
rricaurtep@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-4025-0087
Universidad Estatal de Milagro
Milagro – Ecuador

Jennyffer Rebeca Yépez Ramírez
jyepezr5@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0009-0000-8976-8048
Universidad Estatal de Milagro
Milagro – Ecuador

José Antonio Castillo Cárdenas
joancast@icloud.com
https://orcid.org/0009-0001-4599-4251
Investigador Independiente
Milagro – Ecuador

Juan Diego Leon Vite
Judileon93@gmail.com
https://orcid.org/0009-0004-7671-2837
Investigador Independiente
Milagro – Ecuador

Artículo recibido: 09 de noviembre de 2024. Aceptado para publicación: 23 de noviembre de 2024.
Conflictos de Interés: Ninguno que declarar.

Resumen

Este artículo presenta una revisión sistemática de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales, enfocándose en su eficiencia y orden de convergencia. El objetivo es evaluar las mejoras recientes en estos métodos y su aplicabilidad a diversos problemas. La metodología consistió en analizar artículos recientes sobre métodos iterativos, seleccionando aquellos que proponen avances en velocidad de convergencia y eficiencia computacional. Se compararon doce métodos, evaluando sus características y desempeño.El desarrollo destaca que los métodos con un orden de convergencia cuatro son los más eficientes en términos de rapidez y bajo costo computacional. Sin embargo, algunos métodos con mayor orden de convergencia, aunque más precisos, requieren un mayor número de evaluaciones y operaciones, lo que incrementa su complejidad computacional.De esta manera, la elección del método adecuado depende de las características del problema a resolver. Los métodos con un orden de convergencia cuatro son recomendables cuando se busca un buen balance entre eficiencia y rapidez, mientras que los métodos con mayor orden de convergencia son útiles para problemas donde la precisión es prioritaria, a costa de un mayor costo computacional.

Palabras clave: métodos Iterativos, ecuaciones no lineales, orden de convergencia, índice de eficiencia

Abstract

This paper presents a systematic review of iterative methods for solving nonlinear equations, focusing on their efficiency and order of convergence. The objective is to evaluate recent improvements in these methods and their applicability to various problems. The methodology involved analyzing recent articles on iterative methods, selecting those that propose advancements in convergence speed and computational efficiency. Twelve methods were compared, evaluating their features and performance. The development highlights that methods with a convergence order of four are the most efficient in terms of speed and low computational cost. However, some methods with higher convergence orders, while more precise, require a higher number of evaluations and operations, increasing their computational complexity. Thus, the choice of the appropriate method depends on the characteristics of the problem to be solved. Methods with a convergence order of four are recommended when a good balance between efficiency and speed is needed, while methods with higher convergence orders are useful for problems where precision is prioritized, at the cost of higher computational expense.

Keywords: iterative methods, nonlinear equations, order of convergence, efficiency index

Cómo citar: Villavicencio Mera, J. C., Ricaurte Párraga, R. R., Yépez Ramírez , J. R., Castillo Cárdenas, J. A., & Leon Vite, J. D. (2024). Métodos Iterativos para la Resolución de Ecuaciones No Lineales (2021-2024):. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades 5 (6), 721 – 732. https://doi.org/10.56712/latam.v5i6.3040*

INTRODUCCIÓN

Uno de los desafíos más apasionantes y complejos en las matemáticas por sus múltiples aplicaciones, en ingeniería, economía y demás ciencias, es encontrar las soluciones de ecuaciones y sistema de ecuaciones no lineales. Sin embargo, analíticamente encontrar una solución puede ser muy trabajoso o una misión imposible, para ello existen métodos numéricos basados en procedimientos iterativos que permiten superar esta limitación. En este contexto, los métodos iterativos se han consolidado como una herramienta poderosa para encontrar soluciones numéricas aproximadas de ecuaciones no lineales.

Los métodos iterativos no están exentos de limitaciones. La convergencia puede ser lenta o incluso no ocurrir, dependiendo de la elección del punto inicial o de la naturaleza de la función. En los últimos años estos métodos han mejorado, motivado por la necesidad de soluciones más eficientes y rápidas. Este impulso ha sido acompañado por avances en computación de alto rendimiento, la inteligencia artificial y el análisis numérico, lo que ha permitido explorar nuevas variantes y estrategias adaptativas para superar los desafíos tradicionales.

Los métodos iterativos se pueden clasificar en de un solo paso como el método de Newton o multipaso, como son los métodos de Traub (Traub, 1982), Ostrowski (Ostrowski, 1973), Jarratt (Jarratt, 1966), siendo estos últimos el tipo de método en el que la investigación se va a centrar.

El objetivo de este artículo es realizar una revisión sistemática de diversos métodos iterativos modernos para resolver ecuaciones no lineales desde el año 2021, reconociendo ciertas características de estos como la eficiencia del método y el orden de convergencia. A través de este análisis, se pretende ofrecer una visión comprensiva de las tendencias actuales, las innovaciones más relevantes, y los retos que aún persisten en este campo.

La motivación para llevar a cabo este estudio radica en la importancia de mejorar las técnicas de solución de ecuaciones no lineales. Al sintetizar los avances recientes, se espera contribuir a un entendimiento más profundo de las metodologías iterativas y su aplicabilidad a una amplia gama de problemas no lineales.

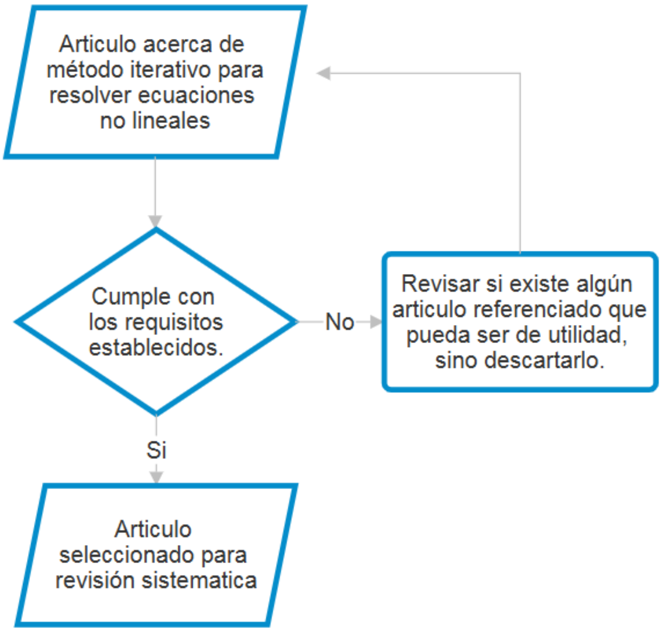
METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación, se definieron criterios de selección centrados en artículos publicados a partir del año 2021, priorizando aquellos que presentan mejoras significativas en los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, particularmente en términos de su eficiencia y orden de convergencia.

Se realizaron búsquedas en bases de datos académicas como Scopus, Web of Science y Google Scholar, utilizando palabras clave relevantes como (“Diseño” OR “Desarrollo”) AND (“Métodos iterativos”) AND (“Ecuaciones no lineales” OR “Sistemas no lineales”). El siguiente diagrama de flujo detalla el proceso de selección de los artículos, según las variables establecidas. Este diagrama permitió excluir aquellas investigaciones que no cumplían con los criterios de selección, asegurando la calidad y relevancia de los estudios seleccionados para la revisión.

Figura 1

Proceso de selección de artículos



Fuente: elaboración propia.

Tras completar esta etapa de búsqueda, se recopiló un total de 26 investigaciones, las cuales fueron depuradas y evaluadas para cumplir con los requisitos establecidos, resultando en la selección final de 7 estudios que cumplían con los criterios definidos.

Los artículos seleccionados se organizan y presentan en tablas y gráficos, que ilustran tanto el índice de eficiencia como el orden de convergencia de los métodos analizados. Esta estructura permite visualizar de manera clara los avances recientes en el campo y facilita la comparación entre los distintos enfoques utilizados para resolver ecuaciones no lineales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Método multipaso

Según mencionan (Cordero & Torregrosa, 2016): Los métodos iterativos de Multipaso También conocidos como predictor-corrector, son aquellos que la $(n + 1) - ésima$ iteración se determina solo con las evaluaciones funcionales de la $n - ésima$ iteración, en conjunto de los pasos anteriores, es decir para el caso sin memoria

$$y_n = \varphi(x_n)$$

$$x_{n+1} = \psi(x_n, y_n)$$

o para el caso con memoria

$$y_n = \varphi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i})$$

$$x_{n+1} = \psi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}, y_n), i < n$$

Orden de Convergencia

No es posible analizar los métodos iterativos sin abordar el orden de convergencia, ya que este concepto determina la velocidad con la que un método se aproxima a la solución, dado un conjunto de condiciones específicas.

Definición 1. Sea $\{x_n\}_{n>0}$ una sucesión de números producida por un método iterativo, que converge a una solución ξ. Si existe un número real p y una constante positiva C, tal que

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = C$$

entonces se puede concluir que el método es de orden p y C es la constante de error asintótica. Del mismo modo, se puede establecer la ecuación del error de un método como

$$e_{n+1} = e_{n+1}^P + O(e_n^{P+1})$$

Donde $e_n = x_n - \xi$. (Cordero & Torregrosa, 2016)

Eficiencia del método

Para del orden de convergencia, existen diversos criterios de eficiencia que ofrecen información adicional sobre la rapidez con la que un método encuentra una estimación de la solución. Estos criterios están relacionados con el número de evaluaciones funcionales d. (Villavicencio M., 2022)

La eficiencia informacional definida por (Traub, 1964) , es la relación entre el orden de convergencia p y el número de evaluaciones funcionales por iteración,

$$I = \frac{p}{d}$$

(Ostrowski, 1960) definió el índice de eficiencia como

$$IE = p^{\frac{1}{d}}$$

El Índice de eficiencia computacional descrito por (Cordero & Torregrosa, 2016), nace de una combinación entre el índice de eficiencia de Ostrowski y el índice operacional de (Ezquerro et al., 2009)

$$IEC = p^{\frac{1}{d+op}}$$

Donde op es el número de operaciones producto/cociente por iteración (op).

La conjetura de Kung y Traub, descrita por (Kung & Traub, 1974): "El orden de convergencia de cualquier método multipaso no puede ser mayor a 2^{d-1}, donde d es el número de evaluaciones funcionales por iteración". Por lo tanto, se dice que un método es óptimo cuando el orden de convergencia p es igual a 2^{d-1}.

Métodos iterativos a estudiar

Luego de una selección exhaustiva de artículos que cumplen con los requisitos previamente mencionados, se identificaron un total de 12 métodos iterativos diferentes propuestos para la resolución de ecuaciones no lineales, que surgen de la mejora continua y refinamiento de técnicas clásicas y la introducción de nuevos algoritmos diseñados para mejorar aspectos como la velocidad de convergencia y la eficiencia de los métodos.

Los métodos escogidos son: MHK (Hafiz & Khirallah, 2021), AMF1 Y AMF2 (Khirallah & Alkhomsan, 2022), TSI (Comemuang & Janngam, 2022), AL2.4 (P. Janngam & C. Comemuangb, 2023), AZ1, AZ2, AZ3 Y AZ4 (Zein, 2023), LCT (Cordero et al., 2024), SN1 Y SN2 (Abdullah et al., 2024).

Hafiz et al. en (Hafiz & Khirallah, 2021) el cual ha sido citado cuatro veces, desarrollaron el Método MHK de dos pasos, el cual tiene como expresión iterativa.

$$y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)'}$$

$$x_n + 1 = y_n - \frac{f(x_n)}{6\,(f'(x_n) + f'(y_n))}\left[1 + 3\frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} - 4\,ln\left(2 - \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)}\right)\right]$$

Khirallah et al. en (Khirallah & Alkhomsan, 2022) el cual ha sido citado 4 veces, desarrollaron el Método AMF1 de dos pasos y el Método AMF2 de tres pasos, los cuales presentan los siguientes esquemas.

Método AMF 1

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n + 1 = y_n - \left[\frac{85f'(y_n)\,f'(x_n) - 41f'(y_n)^2}{-54f'(x_n)^2 + 120f'(y_n)\,f'(x_n)}\right]\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

Método AMF 2

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \left[\frac{85f'(y_n)\,f'(x_n) - 41f'(y_n)^2}{-54f'(x_n)^2 + 120f'(y_n)\,f'(x_n)}\right]\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

$$x_n + 1 = z_n - \left(\frac{1}{3f'(x_n)} - \frac{8}{15f'(x_n) - 27f'(y_n)}\right)\cdot f(z_n)$$

Comemuang et al. en (Comemuang & Janngam, 2022), desarrollaron el Método TSI, que es el de mayor orden en esta revisión, consta de tres pasos e inicialmente incluía la segunda derivada de la función. Sin embargo, esta derivada fue reducida e a una función que depende únicamente de la primera derivada, describiéndolo de la siguiente manera.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{2f(y_n)}{f'(y_n)\left(1 + \sqrt{1 - 2p_n}\right)}$$

$$x_n + 1 = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f(z_n)d_n}{2f'3(z_n)}$$

$$p_n = \frac{f(y_n)f''(y_n)}{f'(y_n)^2}$$

$$f''(y_n) = \frac{2}{y_n - x_n}\left(2f'(y_n) + f'(x_n) - 3\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right)$$

$$f''(z_n) = d_n = \frac{2}{z_n - y_n}\left(2f'(z_n) + f'(y_n) - 3\frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n}\right)$$

El Método AL2.4 desarrollado por en Janngam et al. en (P. Janngam & C. Comemuangb, 2023) el cual se ha citado cinco veces, consiste en un método de tres pasos definido por el esquema

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = x_n - \frac{\big(f(x_n) - f(y_n)\big)f(x_n)}{\big(f(x_n) - 2f(y_n)\big)f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f(z_n)d}{2f'^3(z_n)}$$

$$f''(z_n) = \frac{2}{z_n - y_n}\left(2f'(z_n) + f'(y_n) - 3\frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n}\right) = d.$$

Ali Zein diseño la familia de Métodos AZ de orden cinco en (Zein, 2023) para resolver ecuaciones no lineales, de la cual nacieron los siguientes esquemas.

Método AZ1

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \left[\frac{9f'(x_n) + 31f'(y_n)}{5f'(x_n) + 3f'(y_n)}\right]\frac{f(y_n)}{7f'(y_n) - 2f'(x_n)}$$

Método AZ2

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \left[\frac{5f'(x_n) + 7f'(y_n)}{3f'(x_n) + f'(y_n)}\right]\frac{f(y_n)}{4f'(y_n) - f'(x_n)}$$

Método AZ3

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \left[\frac{231f'(x_n) + 289f'(y_n)}{-13f'(x_n) + 53f'(y_n)}\right]\frac{f(y_n)}{10f'(x_n) + 3f'(y_n)}$$

Método AZ4

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n + \frac{4f'^2(x_n)f\,(y_n)}{(f'(x_n) - f'(y_n))^2\,\big(2f'(x_n) - f'(y_n)\big) - 4\,f'^2(x_n)f'(y_n)}$$

En la investigación (Cordero et al., 2024) citada dos veces, se diseñó la familia de Métodos LTC de orden 4. De esta familia, se seleccionó un método por encima de los demás debido a sus mejores resultados, el cual se define por los siguientes dos pasos.

$$y_k = x_k - \frac{2}{3}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{f'(y_k)} - \frac{1}{6}\frac{f'(y_k)}{f'(x_k)} + \frac{5}{3}\left(\frac{f'(x_k)}{f'(y_k)}\right)^2\right]\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Abdullah et al. diseñaron dos métodos óptimos en (Abdullah et al., 2024), el Método SN1 consiste de dos pasos y el Método SN2 de tres pasos, descritos con los siguientes esquemas.

Método SN1

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(f\,(x_n)^3 + 2f(x_n)f\,(y_n)^2) + f(y_n)^3}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))\,(f(x_n)^2) + f(y_n)^2}$$

Método SN2

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)(f\,(x_n)^3 + 2f(x_n)f\,(y_n)^2)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))\,(f(x_n)^2) + f(y_n)^2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)(z_n - y_n)}{f(z_n) - f(y_n)}\left(\left(1 - \frac{\mu_n^2}{2}\right) + 2\omega_n + \zeta_n^2\right)$$

$$where\ \mu_n = \frac{f(z_n)}{f\,(y_n)},\ \ \omega_n = \frac{f(z_n)}{f(x_n)}\ and\ \zeta_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$$

Una vez culminada la etapa de selección de los métodos, se procedió a tabular su información, en la siguiente tabla se podrá observar los métodos estudiados ordenados por fecha de publicación, el orden de convergencia (p), la ecuación del error y si el método es óptimo o no, según la conjetura de Kung y Traub (KT), estudiada en el capítulo anterior.

Tabla 1

Método, ecuación de error

Método	Ecuación del error	p	KT	Óptimo
MHK	$e_{n+1} = \frac{1}{234}(299c_2^3 - 234c_2c_3 + 27c_4)e_n^4 + O\,(e_n^5)$	4	4	SI
AMF1	$e_{n+1} = \left(\frac{43}{99}c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5)$	4	4	SI
AMF2	$e_{n+1} = \left(-\frac{43}{99}c_2^3c_3 - c_2c_3^2 - \frac{1}{9}c_3c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7)$	6	8	NO
TSI	$e_{n+1} = (c_2^8c_3^2c_4 - 2c_2^7c_3c_4^2 + c_2^6c_4^3)\,e_n^{16} + O\,(e_n^{17})$	16	32	NO
AL 2.4	$e_{n+1} = (2c_2^{11} - 7c_2^9c_3 + c_2^8c_4 + 9c_2^7c_3^2 - 2c_2^6c_3c_4 - 5c_2^5c_3^3 + c_2^4c_3^2c_4 + c_2^3c_3^4)\,e_n^{12} + O\,(e_n^{13})$	12	32	NO
AZ1	$e_{n+1} = \left(\frac{9}{20}c_2^4 - c_2^2c_3\right)e_n^5 + O\,(e_n^6)$	5	8	NO
AZ2	$e_{n+1} = \left(\frac{5}{6}c_2^4 - c_2^2c_3\right)e_n^5 + O\,(e_n^6)$	5	8	NO
AZ3	$e_{n+1} = \left(\frac{231}{260}c_2^4 - c_2^2c_3\right)e_n^5 + O\,(e_n^6)$	5	8	NO
AZ4	$e_{n+1} = -c_2^2c_3e_n^5 + O\,(e_n^6)$	5	8	NO
LCT	$e_{k+1} = \frac{1}{81}(85c_2^3 - 81\,c_2c_3 + 9c_4)e_k^4 + O\,(e_k)^5$	4	4	SI
SN1	$e_{n+1} = (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)$	4	4	SI
SN2	$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_2(2c_2^2 - c_3)(2c_2^4 - 12c_2^2c_3 + c_3^2 + 2c_2c_4)e_n^8 + O(e_n^9)$	8	8	SI

Fuente: elaboración propia.

De la tabla se obtiene la siguiente información.

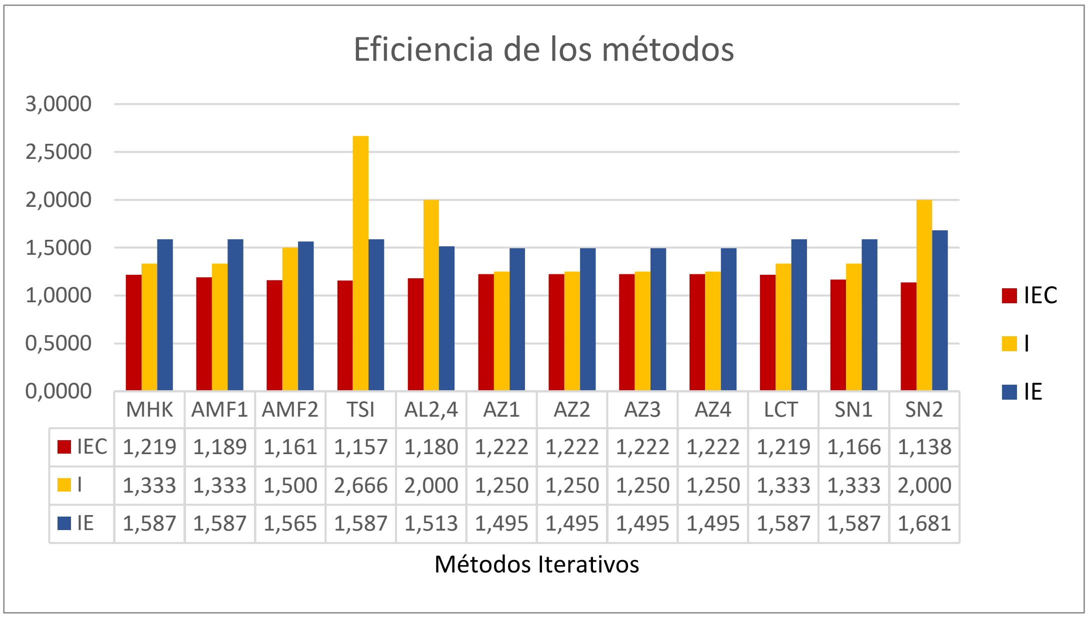
Los métodos con "Óptimo" = Sí son MHK, AMF1, LCT, SN1, SN2.

Los métodos con "Óptimo" = No son AMF2, TSI, AL 2.4, AZ1, AZ2, AZ3, AZ4.

Los métodos óptimos tienen un comportamiento de convergencia más eficiente para ciertas ecuaciones no lineales, mientras que los no óptimos presentan una eficiencia menor en cuanto a la tasa de convergencia o el número de iteraciones necesarias.

Gráfico 1

Tipos de eficiencia de los métodos iterativos estudiados



	MHK	AMF1	AMF2	TSI	AL2,4	AZ1	AZ2	AZ3	AZ4	LCT	SN1	SN2
IEC	1,219	1,189	1,161	1,157	1,180	1,222	1,222	1,222	1,222	1,219	1,166	1,138
I	1,333	1,333	1,500	2,666	2,000	1,250	1,250	1,250	1,250	1,333	1,333	2,000
IE	1,587	1,587	1,565	1,587	1,513	1,495	1,495	1,495	1,495	1,587	1,587	1,681

Fuente: elaboración propia.

El gráfico muestra diferentes tipos de eficiencia de los métodos iterativos estudiados, los valores de eficiencia indican cómo cada método converge hacia una solución. Los métodos TSI (2.666), AL2.4 y SN2 (2.000) presentan una mejor Eficiencia Informacional (I), esto se debe a que son de mayor orden de convergencia. El método SN2, presenta un mayor Índice de Eficiencia (IE) e Índice de Eficiencia Computacional (IEC), debido a que es un método óptimo con mayor orden de convergencia.

CONCLUSIÓN

El análisis comparativo de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales muestra que algunos métodos, como MHK, AMF1, LCT, SN1 y SN2, ofrecen un buen equilibrio entre rapidez de convergencia y bajo costo computacional, alcanzando un orden de convergencia de 4. Estos métodos cumplen con la conjetura de Kung y Traub, lo que los clasifica como óptimos para aplicaciones que requieren soluciones rápidas y eficientes. Por otro lado, métodos como AMF2 y TSI, aunque logran un mayor orden de convergencia, requieren más evaluaciones y operaciones por iteración, lo que aumenta la complejidad computacional y puede limitar su uso en escenarios donde el tiempo de ejecución es crucial.

Los avances recientes en la mejora de estos métodos, como los propuestos destacan la tendencia a optimizar tanto la velocidad de convergencia como la eficiencia computacional, siendo el Método SN2 el mejor de todos los estudiados. Estos desarrollos permiten que los métodos iterativos sean más adaptables y adecuados para resolver problemas no lineales complejos. En resumen, la elección del método depende de las necesidades específicas del problema, ya sea buscando rapidez en la convergencia o una mayor precisión. Los métodos con un orden de convergencia de 4 son los más adecuados para problemas donde se busca un equilibrio entre eficiencia y rapidez.

REFERENCIAS

Abdullah, S., Choubey, N., & Dara, S. (2024). Optimal fourth- and eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations with basins of attraction. Journal of Applied Mathematics and Computing, 70(4), 3477-3507. https://doi.org/10.1007/s12190-024-02108-1

Comemuang, C., & Janngam, P. (2022). Sixteenth-Order Iterative Method for Solving Nonlinear Equations. Computer Science, 17(3), 1039-1049.

Cordero, A., Ledesma, A., Maimó, J. G., & Torregrosa, J. R. (2024). Design and dynamical behavior of a fourth order family of iterative methods for solving nonlinear equations. AIMS Mathematics, 9(4), 8564-8593. https://doi.org/10.3934/math.2024415

Cordero, A., & Torregrosa, J. (2016). On the Design of Optimal Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations. En SEMA SIMAI Springer Series (pp. 79-111). https://doi.org/10.1007/978-3-319-39228-8_5

Ezquerro, J. A., Hernandez, M. A., & Romero, N. (2009). Aproximación de soluciones de algunas ecuaciones integrales de Hammerstein mediante métodos iterativos tipo Newton. 1-8.

Hafiz, M. A., & Khirallah, M. Q. (2021). An optimal fourth order method for solving nonlinear equations. Journal of Mathematics and Computer Science, 23, 86-97. https://doi.org/10.22436/jmcs.023.02.02

Jarratt, P. (1966). Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations. Mathematics of Computation, 20(95), 434-437. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-66-99924-8

Khirallah, M., & Alkhomsan, A. (2022). Convergence and Stability of Optimal two-step fourth-order and its expanding to sixth order for solving nonlinear equations. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 15(3), 971-991. https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v15i3.4397

Kung, H., & Traub, J. (1974). Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. J. ACM, 21, 643-651. https://doi.org/10.1145/321850.321860

Ostrowski, A. M. (1960). Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press.

Ostrowski, A. M. (1973). Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press.

P. Janngam & C. Comemuangb,. (2023). New twelfth order iterative method for solving nonlinear equations and their dynamical aspects. Journal of Mathematics and Computer Science, 28(1), 52-59. https://doi.org/10.22436/jmcs.028.01.05

Traub, J. F. (1964). Iterative methods for the solution of equations. Prentice-Hall.

Traub, J. F. (1982). Iterative Methods for the Solution of Equations. American Mathematical Soc.

Villavicencio M., J. C. (2022). Diferencias finitas para problemas de valor inicial no lineal [Master thesis]. Universitat Politècnica de València.

Zein, A. (2023). A general family of fifth-order iterative methods for solving nonlinear equations. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 16, 2323-2347. https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v16i4.4949