

**LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias
Sociales y Humanidades, Asunción, Paraguay.**

ISSN en línea: 2789-3855, 2025, Volumen VI

Ajuste del modelo de Heligman Pollard a la mortalidad de México mediante redes neuronales recurrentes

Adjustment of the Heligman-Pollard model to mortality in Mexico using
recurrent neural networks

Gerardo Núñez Medina

gnunez@colef.mx

<https://orcid.org/0000-0001-8038-091X>

El Colegio de la Frontera Norte

Tijuana BC – México

DOI: <https://doi.org/10.56712/latam.v6i6.5034>

Artículo recibido: 14 de agosto de 2025.

Aceptado para publicación: 16 de diciembre
de 2025.

Conflictos de Interés: Ninguno que declarar.



Redilat
Red de Investigadores
Latinoamericanos

NÚMERO

DOI: <https://doi.org/10.56712/latam.v6i6.5034>

Ajuste del modelo de Heligman Pollard a la mortalidad de México mediante redes neuronales recurrentes

Adjustment of the Heligman-Pollard model to mortality in Mexico using recurrent neural networks

Gerardo Núñez Medina

gnunez@colef.mx

<https://orcid.org/0000-0001-8038-091X>

El Colegio de la Frontera Norte

Tijuana BC – México

Artículo recibido: 14 de agosto de 2025. Aceptado para publicación: 16 de diciembre de 2025.

Conflictos de Interés: Ninguno que declarar.

Resumen

El modelo de Heligman Pollard es una de las herramientas paramétricas más utilizadas para describir la mortalidad por edad. Este trabajo explora el uso de una red neuronal recurrente, programada en Python con TensorFlow con el objetivo de aprender la relación entre tasas específicas de mortalidad y los parámetros del modelo, utilizando como caso de estudio las tasas de mortalidad de las entidades federativas de México para el periodo 2015-2025. Se diseñó una arquitectura recurrente con tres capas, que recibe secuencias de tasas de mortalidad por edad y que produce una secuencia de salida de ocho parámetros; la red se entrenó con 1,024 secuencias (820 de entrenamiento y 204 de validación) y su desempeño se evaluó mediante la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE). Los resultados para el estado de Oaxaca en 2019 muestran que la red neuronal entrenada es capaz de generar conjuntos de parámetros demográficamente coherentes y una curva suavizada que reproduce adecuadamente los patrones de mortalidad por edad, pero el ajuste obtenido indica que, bajo las condiciones de datos y diseño considerados, el método clásico sigue ofreciendo un mejor desempeño global.

Palabras clave: tasas específicas de mortalidad, aprendizaje profundo, tensorflow

Abstract

The Heligman-Pollard model is one of the most widely used parametric tools for describing age-specific mortality. This paper explores the use of a recurrent neural network, programmed in Python with TensorFlow, with the aim of learning the relationship between specific mortality rates and model parameters, using as a case study the mortality rates of the federal entities of Mexico for the period 2015-2025. A three-layer recurrent architecture was designed, which receives sequences of age-specific mortality rates and produces an output sequence of eight parameters; the network was trained with 1,024 sequences (820 for training and 204 for validation) and its performance was evaluated using the root mean square error (RMSE). The results for the state of Oaxaca in 2019 show that the trained neural network can generate demographically consistent parameter sets and a smoothed curve that adequately reproduces age-specific mortality patterns, but the fit obtained indicates that, under the data and design conditions considered, the classical method continues to offer better overall performance.

Keywords: specific mortality rates, deep learning, tensorflow

Todo el contenido de LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, publicado en este sitio está disponibles bajo Licencia Creative Commons.



Cómo citar: Núñez Medina, G. (2025). Ajuste del modelo de Heligman Pollard a la mortalidad de México mediante redes neuronales recurrentes. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades* 6 (6), 2044 – 2057. <https://doi.org/10.56712/latam.v6i6.5034>

INTRODUCCIÓN

El modelo de Heligman-Pollard es una herramienta fundamental para el ajuste de tasas específicas de mortalidad, debido a su gran capacidad para capturar las variaciones originadas por el riesgo diferencial de muerte a lo largo de la vida humana. La capacidad para modelar adecuadamente las tasas de mortalidad por edad y sexo es una habilidad de suma importancia para evaluar el nivel, comportamiento y efectos de la mortalidad sobre la población. Uno de los modelos más utilizados para ajustar las tasas de mortalidad por edad y sexo es precisamente el modelo de Heligman-Pollard debido a su enorme capacidad para ajustar el comportamiento de las tasas de mortalidad observadas en distintas sociedades (Kostaki, 1991).

Por otra parte, el modelo de Lee-Carter tiene por objetivo ajustar y proyectar las tasas de mortalidad capturando tendencias dinámicas históricas, observadas tanto por edad como por año calendario. Se trata de un modelo basado en el uso de componentes principales, que capturan la tendencia promedio de las tasas específicas de mortalidad además de la variación por edad y temporal de las fluctuaciones en la mortalidad, mientras el modelo de Heligman-Pollard es una función de parametrización que modelar particularidades de ciertos grupos de edad (Thiele, 1871).

La importancia en el uso del modelo de Heligman-Pollard radica en su flexibilidad para modelar la curva de mortalidad, en particular, el particular en su capacidad para describir el comportamiento de la mortalidad desde el nacimiento hasta edades avanzadas mediante una fórmula que estima ocho parámetros, mismos que capturan componentes clave como mortalidad infantil (disminución rápida en los primeros años de vida), la mortalidad joven y adulta temprana (como la joroba de mortalidad en adolescentes y adultos jóvenes) y la mortalidad de adultos mayores (aumento exponencial en edades avanzadas) (Debón, Montes & Sala, 2006).

Modelos como el de Gompertz o Makeham permiten ajustar adecuadamente la mortalidad adulta (Makeham, 1889), pero no así la mortalidad infantil o juvenil, en contraparte, el modelo de Heligman-Pollard puede ajustar comportamientos no monótonos, y por lo tanto capturar, como se mencionó anteriormente, variaciones de mortalidad en edades jóvenes (por accidentes o violencia) y adultas (Congdon, 1993). De manera que su uso presenta claras ventajas sobre otros modelos. Las limitaciones del modelo de Heligman-Pollard giran en el sentido de su complejidad (8 parámetros) debido a que requiere una importante cantidad de datos (de calidad) y utiliza métodos de estimación robustos (como mínimos cuadrados no lineales), además de que en edades extremas (de 100 años o más), puede necesitar ajustes adicionales (Dellaportas, Smith & Stavropoulos, 2001).

METODOLOGÍA

Debido a que la estructura de la mortalidad en sociedades modernas se ha vuelto más compleja, producto del incremento paulatino en el número de defunciones, especialmente entre los adultos jóvenes, se hace necesario crear modelos más avanzados que permitan capturar estos nuevos patrones de mortalidad (Carriere, 1992). Así, el modelo de Heligman-Pollard (1980) combina la precisión matemática con una importante capacidad de ajuste empírico, por lo que se ha convertido en uno de los métodos más utilizados para modelar el comportamiento de patrones de mortalidad por edad. Así, el ajuste del modelo de Heligman-Pollard se realiza a un conjunto de tasas de mortalidad observadas, lo que requiere múltiples parámetros (Irnawaty, 2008).

La ecuación original de Heligman-Pollard está dada por:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

El modelo se compone de la suma de tres términos que describen los patrones de mortalidad a lo largo de toda la vida de las personas. Donde los términos involucrados representan:

q_x : Probabilidad de muerte a la edad x .

$(A^{(x+B)^C})$ modela el comportamiento de la mortalidad infantil.

$(D \cdot e^{-E(\ln x - \ln F)^2})$: modela la “joroba” de mortalidad juvenil/adulta temprana.

$(G \cdot H^x)$ modela la mortalidad de adultos mayores.

Cada uno de los términos de la ecuación representa una componente distinta de la mortalidad y tiene una interpretación demográfica particular. El primer término modela una función exponencial de decrecimiento rápido que captura la disminución de la mortalidad experimentada durante la primera infancia, para edades inferiores a los 10 años (Heligman & Pollard, 1980). El parámetro A representa un valor similar a q_0 y mide el nivel de mortalidad infantil, el parámetro B representa la mortalidad infantil entre el nacimiento y el primer año de vida, en la práctica su valor está próximo a cero y por lo que su efecto sobre las probabilidades de fallecimiento es prácticamente nulo, mientras que el valor del parámetro C se asocia a la velocidad de descenso la tasa de mortalidad infantil, a mayores valores de C más rápido decrecerá la mortalidad infantil, al aumentar la edad.

El segundo término captura la mortalidad adulta a través de una expresión matemática similar a una curva lognormal. En la literatura demográfica y actuarial se le conoce como la joroba de los accidentes y cuantifica las defunciones por accidentes para el caso de los hombres y la sobre mortalidad materna para el caso de la población femenina. Es decir, modela los excedentes de mortalidad adulta, por lo que se ubica entre los quince y cincuenta años. El parámetro D especifica la severidad de la joroba, a mayor D se observarán mayores niveles de sobre mortalidad, al tiempo que el parámetro E define la dispersión de la joroba y el parámetro F muestra la localización de la joroba, sus valores van de los 15 a los 60 años (Irnawaty, 2008).

El tercer sumando representa la ley de Gompertz, misma que refleja el crecimiento de la mortalidad para las edades adultas mayores, de modo que los parámetros G y H refleja la severidad y velocidad con la que la mortalidad crece en durante el último tramo de la vida.

Estimación del modelo de Heligman-Pollard

Los métodos más utilizados para ajustar el comportamiento de un conjunto de tasas específicas de mortalidad —es decir, suavizar su comportamiento, eliminar irregularidades y describir su evolución— comprenden técnicas estadísticas, demográficas y de modelado. Así, los principales métodos comprenden el uso de: técnicas de suavizamiento, de modelos paramétricos, modelos estadísticos/estocásticos y modelos de inteligencia artificial (Hartmann, 1987).

La elección del método depende principalmente de la cantidad y calidad de los datos disponibles, así como del objetivo del análisis: ajuste, pronóstico o suavizamiento. En el ámbito demográfico, el uso de modelos paramétricos como el modelo de Heligman-Pollard, Gompertz o Makeham o de modelos estocásticos como el método de Lee-Carter suelen considerarse el estándar, estos son aplicables siempre que se cuente con información suficiente (Heligman & Pollard, 1980). Debido a que el método de Lee-Carter requiere de grandes cantidades de información histórica, éste suele utilizarse mayormente para pronósticos. En este punto es importante señalar que el objetivo general del trabajo se centra en el ajuste del modelo de Heligman-Pollard en particular en el análisis de técnicas de ajuste paramétricas basadas en modelos de inteligencia artificial (Kostaki, 1991).

Existen diferentes métodos para ajustar el comportamiento de las tasas específicas de mortalidad del modelo de Heligman-Pollard, consisten principalmente de técnicas de estimación paramétrica y de optimización basadas en la utilización de técnicas de mínimos cuadrados, que es el método clásico

más extendido, en contraparte, en años recientes has surgidos métodos de estimación basados en la aplicación de modelos de inteligencia artificial, en particular las redes neuronales recurrentes. Mientras los métodos clásicos de estimación minimizan la suma de los cuadrados de las diferencias entre las tasas observadas y las calculadas para el modelo Heligman-Pollard en cada grupo de edad, los métodos de estimación basados en el uso de redes neuronales recurrentes combinan la formulación paramétrica del modelo de Heligman-Pollard con la flexibilidad de aprendizaje secuencial proporcionados por la inteligencia artificial (Manaswi, 2018).

En investigaciones recientes se ha explorado el uso de redes neuronales para aprender los patrones de mortalidad y estimar de manera automática los parámetros del modelo de Heligman-Pollard, lo que evidentemente requiere de grandes cantidades de datos, en contraste con los métodos de ajuste tradicional que consiste en encontrar los parámetros que mejor representan los datos observados utilizando generalmente técnicas de optimización, es decir, estiman una función que minimiza la distancia entre los datos observados y la probabilidad de muerte estimada para cada edad.

El uso una red neuronal recurrente enfocada a estimar un modelo de Heligman-Pollard va a permitir capturar dependencias secuenciales y patrones complejos presentes en los patrones de mortalidad observados, lo que eventualmente mejorará el grado de ajuste, una vez que el modelo haya sido entrenado con suficientes datos.

Las redes neuronales recurrentes son un tipo de red neuronal diseñada específicamente para procesar datos secuenciales. Este tipo de redes son esenciales para tareas donde el orden y el contexto son importantes, esto se debe a que en una red neuronal recurrente cada neurona (o celda) recibe no solo información en la entrada actual, sino información procesada en pasos previos la cual puedes ser vista como "memoria", de modo que la red puede "recordar" lo ocurrido en secuencias anteriores. Dichos "recuerdos" son básicamente iteraciones de una neurona hacia sí misma y hacia el siguiente paso, lo que forma bucles internos que se mantienen activos por largos periodos del tiempo (Sarkar, Bali & Ghosh, 2018).

A diferencia de las redes neuronales tradicionales, en una red neuronal recurrente las neuronas tienen conexiones que viajan hacia el futuro pero también hacia sí mismas (ciclo), lo que les permite recordar información de pasos anteriores en la secuencia; de manera que una celda recurrente procesa una entrada (x_t) e información de una salida del paso anterior (h_{t-1}), a partir de lo cual genera la salida actual (h_t). Esta operación se repite en cada paso de la secuencia.

Una vez definida la estructura de una celda o neurona, una red neuronal recurrente se diseña y organiza en capas –al igual que otras arquitecturas de redes neuronales– con la finalidad de modular, abstraer y profundizar el procesamiento de información secuencial. Cada capa puede aprender representaciones más complejas a partir de la secuencia de entrada, dada su capacidad de abstracción progresiva. Las capas iniciales detectan patrones simples y sucesivamente las capas posteriores capturan patrones más abstractos o relaciones de mayor orden. El uso de capas mejora la capacidad de modelado, dado que el apilamiento de varias capas recurrentes ("lo que se conoce como aprendizaje profundo") amplía la capacidad de la red para modelar dependencias complejas, además de que el uso de diferentes capas permite la especialización en distintas tareas (Gulli, Kapoor & Pal 2019).

Así, el uso de múltiples capas permita a la red mejorar su capacidad de abstracción y generalización, aprender dependencias más complejas, dividir el procesamiento en etapas lógicas además de modular y escalar la red en función de la complejidad de la tarea asignada. De manera que el diseño multicapa de redes es un principio central, tanto en diseño de redes neuronales recurrentes como en otro tipo de arquitecturas de redes neuronales modernas (Cortés-Toto, Guerrero & Reyes, 2017).

La arquitectura de una red neuronal recurrente se define en términos de la salida del estado oculto en el tiempo t , h_t , la cual depende tanto de la entrada x_t como del estado oculto h_{t-1} anterior, de forma que puede definirse como:

$$h_t = f(W_{xh} x_t + W_{hh} h_{t-1} + b_h)$$

$$y_t = f_y(W_{hy} h_t + b_y)$$

Donde x_t es la entrada actual, h_{t-1} es el estado oculto previo, W_{xh} , W_{hh} y W_{hy} son matrices de pesos, b_h , b_y son sesgos, f y f_y son funciones de activación (Sarkar, Bali & Ghosh, 2018).

Las principales capas en una red neuronal recurrente son: (1) la capa de entrada (Input layer) que recibe una secuencia de datos de entrada, en la que cada elemento de la secuencia se representa como un vector, mismo que introduce de manera secuencial a la red. Es decir, la capa de entrada tiene como función ingresar los datos en el formato y orden requeridos para que las siguientes capas puedan procesar la información secuencialmente. (2) Capas recurrentes (capa oculta recurrente) que conforman el núcleo de la red neuronal recurrente, en estas capas cada nodo procesa la entrada actual y recibe información del estado oculto anterior, lo que le permite a la red conservar una memoria en la que se almacena información contextual y dependencias temporales. (3) Capa de salida, la cual transforma los estados ocultos en la salida final esperada (Lee, Singh & Cho, 2021).

Así, una red neuronal recurrente se construye apilando capas recurrentes usando como entrada secuencias de datos, provenientes de la capa anterior. La clave de este tipo de redes descansa en los bucles internos que conservan memoria durante toda la secuencia. La etapa crítica que permite la fase de entrenamiento se realiza como cualquier red neuronal, pero los gradientes se calculan hacia atrás en toda la secuencia.

Una vez diseñada, la red neuronal recurrente debe pasar por una fase de entrenamiento debido a que una vez creada, la red, no tienen conocimiento previo acerca del comportamiento de los datos, ni de las relaciones presentes entre los elementos que definen el problema modelado, en este caso las relaciones de la curva de Heligman-Pollard. De manera que, durante la fase de entrenamiento, se van a ajustar los pesos y sesgos internos de la red, para aprender a reconocer patrones, dependencias y estructuras presentes en los datos de entrada, lo que le permitirá a la red neuronal minimizar la diferencia entre las estimaciones realizadas y los datos observados (Manaswi, 2018).

Durante la fase de entrenamiento, la red va a utilizar un conjunto de datos conocidos como datos de entrenamiento, mismos que contienen los parámetros correctos que ajustan el modelo de Heligman-Pollard respecto de los datos de mortalidad observados, esto permite que a la red ajustar sus parámetros internos (matrices de pesos y sesgos) para minimizar el error de predicción o función de pérdida empleando algoritmos como el de retro-propagación. El objetivo final de la fase de entrenamiento es que la red neuronal recurrente pueda aprender a hacer predicciones a partir de un nuevo conjunto de datos, no observados (Gulli, Kapoor & Pal 2019).

El algoritmo implementado para estimar los parámetros del modelo Heligman-Pollard, a partir del uso de una red neuronal recurrente consistió en (Sarkar, Bali & Ghosh, 2018):

Preparar los datos de entradas. Se ordenaron las tasas de mortalidad por edad y por año de ocurrencia, lo que implicó organizar los datos como secuencias de entrada para la red neuronal, para lo que se estandarizaron los datos.

Definir los datos de salida. Se ordenó la salida de cada secuencia estimada por la red neuronal recurrente como un vector de ocho parámetros (A, B, C, D, E, F, G, H) que define el modelo Heligman-Pollard, para el conjunto de datos de entrada (Irnawaty, 2008).

Construir la red neuronal recurrente. Se definió una red neuronal recurrente a partir de una estructura básica compuesta por tres capas recurrentes, la primera capa, definida como capa de entrada se conformó de 21 neuronas, la capa densa con 16 neuronas y la capa de salida, con 8 neuronas, la cual fue la encargada de entregar los parámetros de predicción de la red neuronal. En este punto es importante señalar que la red fue programada íntegramente en Python con base en el paquete TensorFlow (Lee, Singh & Cho, 2021).

Fase de entrenamiento del modelo. Una vez definida la estructura de la red neuronal recurrente, el siguiente paso es la fase de entrenamiento, durante esta fase se separan los datos en entrenamiento y validación. La red neuronal recurrente se entrena para aprender la asociación entre la secuencia de tasas y los parámetros óptimos correspondientes. De esta manera, la fase de entrenamiento contó con un total de 1,024 secuencias de datos divididos en 820 secuencias de aprendizaje y 204 secuencias de validación.

Predicción. La última etapa de la red neuronal recurrente consiste en utilizar la red para predecir parámetros de una secuencia de datos nueva, así, una vez entrenada la red neuronal recurrente deberá ser capaz de ajustar correctamente una secuencia de datos, lo que implica la red aprendió a predecir correctamente los parámetros del modelo de Heligman-Pollard.

Una de las formas más comunes para evaluar la calidad de la red neuronal recurrente implementada consiste en evaluar el error de ajuste de la red respecto de las tasas de mortalidad observadas y las tasas estimadas utilizando indicadores como la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE). El cálculo del error de predicción RMSE permite comparar la mortalidad estimada por la red versus la mortalidad observada, a partir de la siguiente ecuación:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_x (q_x^{obs} - q_x^{H-P})^2}{n}}$$

Es importante señalar que la red neuronal recurrente aprende la relación entre los patrones de mortalidad por edad y los parámetros que mejor ajustan el modelo Heligman-Pollard, es decir, este enfoque permite automatizar y potencialmente mejora el proceso de estimación tradicional, sobre todo para datos secuenciales extensos o complejos. El ajuste del modelo de Heligman-Pollard mediante redes neuronales recurrentes presenta ventajas y desafíos frente a los métodos tradicionales. En general, el uso de una red neuronal recurrente permite capturar de dependencias temporales, así como modelar largas series de datos de mortalidad considerando el comportamiento de los parámetros del modelo de Heligman-Pollard, lo que resulta particularmente útil para proyecciones donde los patrones de mortalidad cambian frecuentemente (Guerrero, 2008).

DESARROLLO

Datos

Las tasas específicas de mortalidad se estiman en términos generales como el cociente de las defunciones por edad y la población media de ese mismo grupo de edad, multiplicado por mil. Dichas tasas son el insumo principal para ajustar el modelo de Heligman-Pollard. Las bases de datos utilizadas para contabilizar las defunciones fueron las Estadísticas de Defunciones Registradas, las que contiene información anual desagregada por edad, sexo, entidad federativa, causa de muerte y año de ocurrencia. Estas bases de datos permiten obtener el número de defunciones por grupos quinquenales de edad por año calendario.

La población total clasificada por edad y entidad federativa fue obtenida de las proyecciones de población realizadas por El Consejo Nacional de Población (CONAPO). Las series de datos abarcan los años 2015 a 2025. De esta manera, las tasas específicas de mortalidad fueron estimadas como el cociente de:

$$m_x = \frac{Def_x}{Pob_x}$$

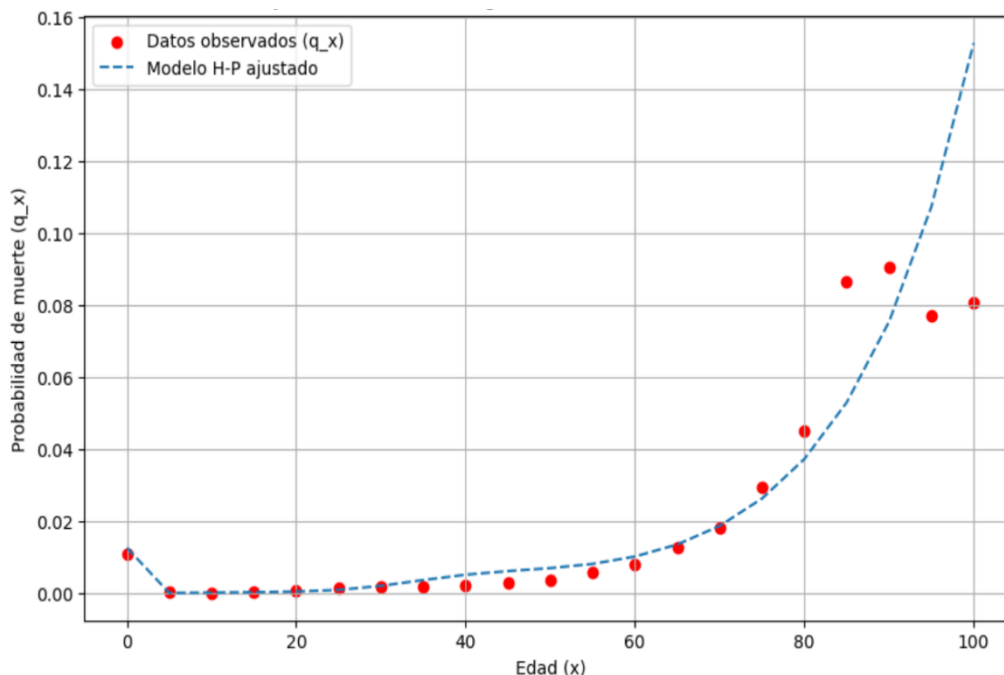
Las defunciones (Def) a edad x y la población de edad x a mitad del año.

RESULTADOS

Los principales resultados de estimar la curva de Heligman-Pollard a partir de una red neuronal recurrente se concentran en la capacidad predictiva, la flexibilidad de forma de la curva y la cuantificación de la incertidumbre alrededor de la mortalidad. En términos generales, al entrenar una red neuronal recurrente directamente sobre un amplio conjunto de tasas específicas de mortalidad (o sobre los parámetros de la curva de Heligman-Pollard) se obtienen menores errores en comparación con los modelos paramétricos clásicos, siempre que los parámetros de los datos de entrenamiento estén bien calibrados.

Gráfico 1

Ajuste del modelo de Heligman-Pollard a partir de la red neuronal recurrente



Fuente: elaboración propia con base en estimaciones realizadas en Python/TensorFlow.

La curva clásica de Heligman-Pollard impone una forma funcional fija para tres componentes (mortalidad infantil, accidentes juveniles y vejez), mientras que una red neuronal recurrente puede aprender correcciones sistemáticas por edad para estos componentes. El resultado práctico es una curva que mantiene la interpretabilidad estructural del modelo de Heligman-Pollard, pero con un mejor ajuste local, es especial en edades problemáticas como suele ocurrir con la subestimación en edades muy longevas (Gulli, Kapoor & Pal 2019).

En la gráfica 1 se presentan el ajuste por predicción, de las tasas de mortalidad del estado de Oaxaca al año 2019, al mismo tiempo en la tabla 1 se presenta la secuencia de parámetros del modelo de Heligman-Pollard resultado de la estimación suavizada de los ocho parámetros predichos por la red neuronal recurrente entrenada.

Tabla 1

Parámetros del modelo Heligman-Pollard estimados según modelo

Parámetro	A	B	C	D	E	F	G	H	RMS E
Red Neuronal Recurrente	0.147 1	1.925 6	1.250 4	0.003 2	8.589 1	43.79 69	0.000 1	1.086 2	0.006 4
Mínimos cuadrados no lineales	0.133 3	1.869 6	1.330 9	0.086 5	10.00 00	99.68 96	0.001 5	0.985 6	0.019 0

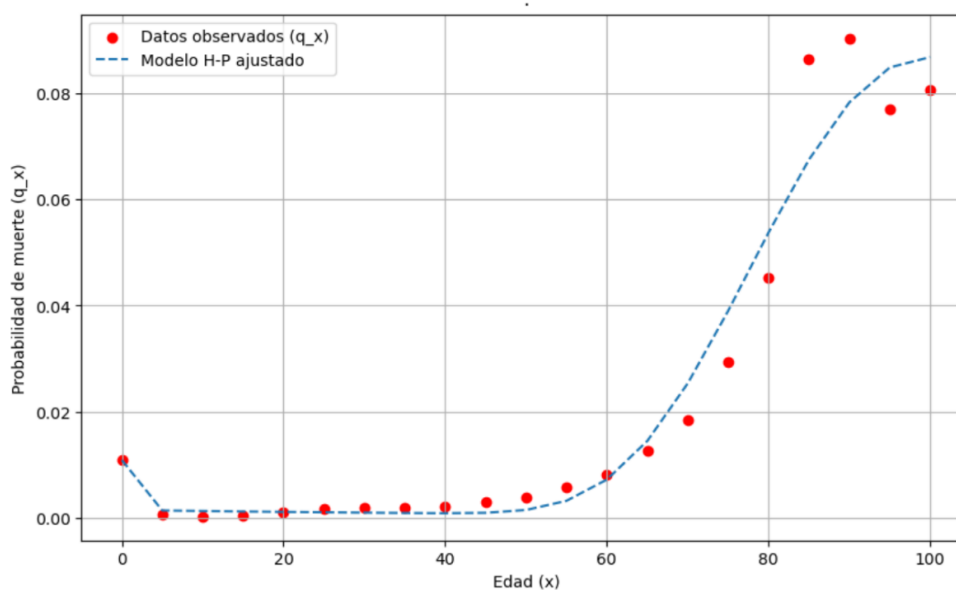
Fuente: elaboración propia con base en estimaciones realizadas en Python/TensorFlow.

Los parámetros estimados permiten interpretar la evolución de cada componente asociado a la mortalidad infantil, la mortalidad por accidentes y la asociada a adultos mayores, y en un sentido amplio como series de tiempo no lineales aprendidas por la red. En contraste con los resultados presentados en la gráfica 1, en la gráfica 2 se presenta el ajuste para los mismos datos de mortalidad (tasas de mortalidad del estado de Oaxaca al año 2019) realizados a partir del ajuste por un modelo de mínimos cuadrados no lineales.

Si bien, diferentes revisiones de métodos de aprendizaje profundo enfocados al ajuste de patrones de mortalidad coinciden en que, frente a modelos de optimización no lineales clásicos, las redes suelen mejorar el ajuste RMSE especialmente en horizontes de pronóstico más largos y en patrones complejos por edad, aunque el margen de mejora puede ser modesto cuando la mortalidad sigue trayectorias relativamente suaves, esto ocurre en casos en los que las redes neuronales recurrentes han sido entrenadas con una gran cantidad de datos, lo que evidentemente no es el caso para este ejercicio dado que los resultados referentes a la calidad de ajuste de la red neuronal son evidentemente inferiores a los alcanzados por el ajuste de mínimos cuadrados no lineales, lo cual se muestra en la tabla 1.

Gráfico 2

Ajuste del modelo de Helligman-Pollard a partir de mínimos cuadrados no lineales



Fuente: elaboración propia con base en estimaciones realizadas en Python/TensorFlow.

DISCUSIÓN

El estudio evidencia el potencial de las redes neuronales recurrentes para automatizar la estimación de los parámetros del modelo de Heligman-Pollard, para capturar dependencias secuenciales en series de mortalidad más extensas y para escalar el ajuste simultáneo en múltiples poblaciones, lo que abre una línea de trabajo prometedora para aplicaciones donde se disponga de grandes series de bases de datos y donde además se requiere modelar cambios estructurales en los patrones de mortalidad.

Los resultados encontrados, mostraron que las tasas de mortalidad estimadas tanto por la red neuronal como por el modelo tradicional se ajustaron adecuadamente a los datos reales para edades inferiores a 80 años. Los resultados también mostraron que el modelo Heligman-Pollard parece

ajustarse mejor a los datos bajo las estimaciones del modelo de mínimos cuadrados no lineales que el modelo ajustado por la red neuronal para edades superiores a 80 años, debido a que este último, mostró resultados donde el modelo ajustado de Heligman-Pollard parece sobreestimar los datos reales. Sin embargo, se puede concluir que ambos modelos parecen ajustarse adecuadamente a los datos del estado de Oaxaca, para edades inferiores a 80 años y que el resultado es aceptable para edades más avanzadas, donde diferencia relativa entre modelos y entre la mortalidad real no supera un diez por ciento de error (Cortés-Toto, Guerrero & Reyes, 2017).

El costo de utilizar una RNN para estimar los parámetros del modelo de HP recae en que la red neuronal funciona como una caja negra, por lo que se pierde la transparencia de los métodos de optimización no lineal estándar tales como el método de mínimos cuadrados o de Gauss-Newton y por lo tanto, se hace más difícil asignar cambios en la curva a parámetros concretos, sin un análisis de sensibilidad adicional.

En términos generales, la red neuronal recurrente permitió estimar los parámetros de la curva de Heligman-Pollard con una coherencia demográfica adecuada, de manera que los parámetros estimados son interpretables, esto a pesar de que la red neuronal entrenada, no logro superar en calidad de ajuste al método tradicional de mínimos cuadrados no lineales, dado que el modelo de Heligman-Pollard estimado a partir de la red neuronal recurrente produjo un error RMSE de 0.0064 para las tasas de mortalidad de Oaxaca, mientras que el ajuste por mínimos cuadrados no lineales alcanza un RMSE de 0.019, lo que indica que, el método clásico alcanzó un mejor ajuste numérico global (Debón, Montes & Sala, 2006).

Si bien, la comparación típica RMSE sobre las tasas de mortalidad por edad sugiere que, en escenarios con suficiente información, los modelos de aprendizaje profundo logran errores ligeramente menores o comparables a los alcanzados por los métodos tradicionales. En términos estrictos, de RMSE, el método de Heligman-Pollard suele ser competitivo ante otro tipo de modelos paramétricos, sin embargo, enfoques más flexibles como TOPALS o modelos tipo spline alcanzan frecuentemente menores RMSE en segmentos específicos de edad, con una estructura o modelo mucho menos compleja.

CONCLUSIÓN

Los gráficos 1 y 2 muestran que las tasas de mortalidad ajustadas a través de mínimos cuadrados no lineales predicen adecuadamente el comportamiento de los datos reales en todas las edades, mientras que el ajuste a través de la red neuronal recurrente del modelo de Heligman-Pollard parece sobreestimar los datos reales en las edades más avanzadas, por arriba de los 80 años. Al comparar el comportamiento general, de ambos modelos, estos parecen ajustarse adecuadamente a los datos reales, en general, las tasas previstas evolucionan en consonancia con los datos reales (Ovin & Silva, 2016).

Si bien, diversas investigaciones señalan que las redes neuronales, cuando disponen de grandes series históricas de datos, alcanzan un desempeño superior al que presentan los métodos de ajuste tradicionales, debe señalarse que este no fue el caso, debido posiblemente al limitado volumen de datos, lo que explica que la red entrenada no alcance el desempeño esperado. Aunque el RMSE resultó peor, la red neuronal recurrente demuestra la capacidad para aprender automáticamente relaciones entre patrones de mortalidad por edad y estimar correctamente los ocho parámetros del modelo de Heligman-Pollard, automatizando el proceso de estimación y potencialmente haciéndolo escalable a series largas de datos.

Es importante señalar que el uso de una red neuronal recurrente exige grandes cantidades de datos de buena calidad y una calibración cuidadosa de la arquitectura y del entrenamiento; por lo que en

contextos con información limitada o de mala calidad, los métodos clásicos siguen siendo más robustos y estables, sin embargo, es posible concluir que las redes neuronales recurrentes son una alternativa prometedora para ajustar y proyectar la curva de Heligman-Pollard (Hartmann, 1987).

Finalmente, el uso de redes neuronales recurrentes ofrece ventajas en contextos dinámicos y multivariados, permite pronosticar el comportamiento de las tasas específicas de mortalidad a partir de la estimación de ocho parámetros del modelo Heligman-Pollard. La implementación de la red en un lenguaje de programación tan versátil como Python ofrece grandes ventajas como la existencia de un ecosistema de librerías como TensorFlow/Keras y PyTorch entre otras, que incluyen implementaciones optimizadas de capas recurrentes, lo que permitió construir, entrenar y evaluar la red con un número limitado de líneas de código.

REFERENCIAS

- Carriere, J. F. (1992). Parametric models for life tables. *Transactions of Society of Actuaries*, 44, 77-99.
- Congdon, P. (1993). Statistical graduation in local demographic analysis and projection. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, 156(2), 237-270.
- Cortés-Toto, D., Guerrero, V. M. y Reyes, H. (2017). Trend smoothness achieved by penalized least squares with the smoothing parameter chosen by optimality criteria. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(2), 1492-1507.
- Debón, A., Montes, F. y Sala, R. (2006). A comparison of nonparametric methods in the graduation of mortality: Application to data from the Valencia region (Spain). *International Statistical Review*, 74(2), 215-233.
- Dellaportas, P., Smith, A. y Stavropoulos, P. (2001). Bayesian analysis of mortality data. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 164, 275-291.
- Gulli, A., Kapoor, A., & Pal, S. (2019). *Deep learning with TensorFlow 2 and Keras: regression, ConvNets, GANs, RNNs, NLP, and more with TensorFlow 2 and the Keras API*. Packt Publishing Ltd.
- Guerrero, V. M. (2008). Estimating trends with percentage of smoothness chosen by the user. *International Statistical Review*, 76(2), 187-202.
- Hartmann, M. (1987). Past and recent attempts to model mortality at all ages. *Journal of Official Statistics*, 3(1), 19-36.
- Heligman, L. y Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(1), 49-80.
- Irnawaty, R. (2008). Expanding an abridged life table using the Heligman-Pollard model. *Matematika*, 24(1), 1-10.
- Kostaki, A. (1991). The Heligman-Pollard formula as a tool for expanding an abridged life table. *Journal of Official Statistics*, 7(3), 311-323.
- Lee, T., Singh, V. P., & Cho, K. H. (2021). Tensorflow and keras programming for deep learning. In *Deep learning for hydrometeorology and environmental science* (pp. 151-162). Cham: Springer International Publishing.
- Makeham, W. (1889). On the further development of Gompertz's law. *Journal of the Institute of Actuaries*, 28(2), 152-159.
- Ovin, A. y Silva, E. (2016). Aproximación del modelo de Heligman y Pollard a través de una propuesta no paramétrica. Ponencia presentada en la XIII Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, "Dinámicas de población y desigualdad", Universidad Nacional Autónoma de México. México.
- Sarkar, D., Bali, R., & Ghosh, T. (2018). *Hands-On Transfer Learning with Python: Implement advanced deep learning and neural network models using TensorFlow and Keras*. Packt Publishing Ltd.
- Thiele, T. (1871). On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout the whole of life, tested by a series of observations made use of by the Danish life insurance company of 1871. *Journal of the Institute of Actuaries and Assure Magazine*, 16(5), 313-329.

Todo el contenido de **LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades**, publicados en este sitio está disponibles bajo Licencia Creative Commons 